γενικά $\frac{\partial}{\partial x}$ $\frac{d}{dt}$

16ο Μάθημα "Διαφορετικό κομμάτι ύλης" 02/05/18

Λογισμός Μεταβολών

Το βασικό πρόβλημα που μελετάμε στην ενότητα αυτή είναι η εύρεση μιας συνάρτησης $y = y(x)$ ώστε το ολοκλήρωμα

$J = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$, $y' = \frac{dy}{dx}$, να είναι ακρότατο δηλ. να ελαχιστοποιείται ή να μεγιστοποιείται.

(Η ερώτηση είναι: να βρεθεί η ~~συνάρτηση~~ y ~ νοών x που ελαχιστοποιεί/μεγιστοποιεί/βελτιστοποιεί αυτό το ολοκλήρωμα.

οι μεταβλητή Δε ζητώ x, μη αλλά ολόκληρη συνάρτηση

↦ Βρίσκω ένα τρόπο αλγοριθμικά

Το ολοκλήρωμα J καλείται συναρτησοειδές (functional).

Εξαρτάται αποκλειστικά από τη συνάρτηση $y(x)$ εφόσον τα άκρα α και b είναι σταθερά.

Στη γενική περίπτωση τόσο τα άκρα a, b όσο και η συνάρτηση $y(x)$ ζητούνται ώστε το J να είναι ακρότατο.

Υποθέτουμε ότι ζητούμε την $y = y(x)$ τέτοια ώστε:

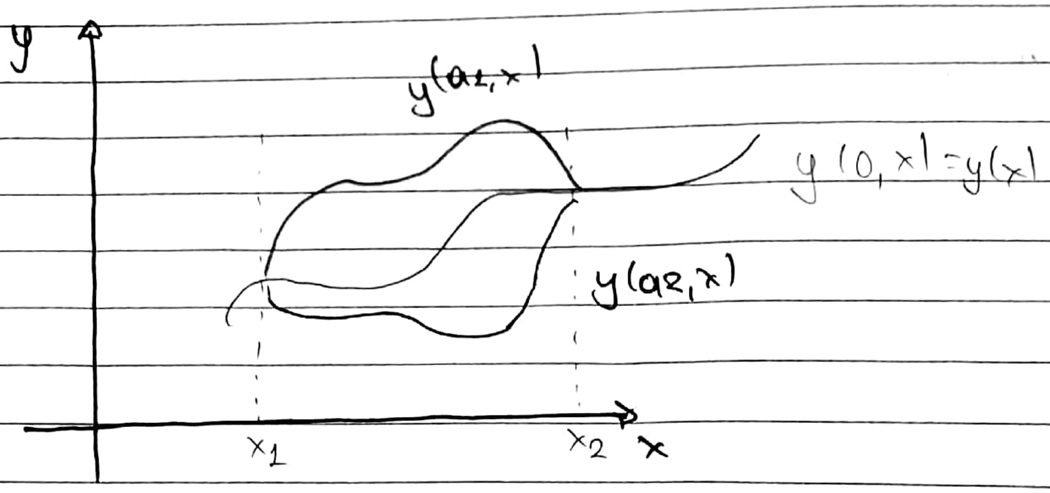
$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,dx$ να είναι, για παράδειγμα, ελάχιστο.

Δηλ. Ζητώ τη συνάρτηση $y(x)$ έτσι ώστε οποιαδήποτε άλλη θα δώσει J μεγαλύτερο απ' αυτή την τιμή.

Γράφω τη συνάρτηση ως $y = y(a, x)$ (και προφανώς) με $y(x) = y(0, x)$
→ το ορίζω εγώ 0

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α υπάρχει μια συνάρτηση $y = y(a, x)$ για την οποία βρίσκω μια τιμή του $J = J(a)$

Για $a = 0$ το J ελαχιστοποιείται, δηλ. μεταβάλλω τις τιμές της παραμέτρου α ώστε να βρούμε τη βέλτιστη (εδώ την ελάχιστη) τιμή του J.



(Πώς θα ορίσω αυτή την παράμετρο; $y(0,x)=y(x)$

Πρόβλημα: Θέλω να βρω την ελάχιστη συνάρτηση "μονοπάτι" που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση J

(→ μπορεί σχηματικά να φαίνεται λάθος. Αλλά εδώ έχω ορίσει η συνάρτηση "μονοπάτι" να είναι βέλτιστη.

Ορίζουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\eta=\eta(x)$ με συνεχή την παράγωγό της ώστε να ισχύει $y(a,x)=y(0,x)+a\,\eta(x)$ 1η

αυτή η παράμετρος μου δείχνει πόσο απέχω από το ιδανικό

Επιπλέον, $\begin{cases} y(a,x_1)=y(0,x_1) \\ y(a,x_2)=y(0,x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta(x_1)=0 \\ \eta(x_2)=0 \end{cases}$

Πλέον, το J γράφεται ως:

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y(x),y'(x))\,dx=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y(a,x),y'(a,x))\,dx$$

$$J \overset{\text{συναρτήσει του } a}{=} J(a)$$

Δηλ. το J είναι ακρότατο όταν $\left.\dfrac{dJ}{da}\right|_{a=0}=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (συνοψίζουμε τι μάθαμε ως εδώ)

Έστω $f=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, $J=\int_0^{2\pi} f dx$ και η λύση να είναι

$y=y(x)=x$.

Επιλέγω $n(x)=\sin x$.

$y(a,x)=y(0,x)+an(x)=y(x)+a\sin x=x+a\sin x$

$n(0)=n(2\pi)=0$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=1+a\cos x$$

$J=\int_0^{2\pi}(1+a\cos x)^2 dx=2\pi+a^2\pi$

παραμένοντας ως προς α, ακρότατο ελάχιστο

Προφανώς, ελαχιστοποιείται στο $a=0$, $J(0)=2\pi$

το ιδεατό μας πρόβλημα. $\square$

Εξισώσεις Euler

Θεωρούμε το συναρτησοειδές $J(a)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y(a,x),y'(a,x))dx$.

Τότε $\frac{dJ}{da}=\frac{d}{da}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx \underset{\text{λόγω ομοιόμορφης συνέχειας}}{\overset{\text{το διαφορικό μπαίνει μέσα}}{=}} \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial a}(x,y,y')dx$

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση 2 μεταβλητών, y και y', έτσι ώστε:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a}\left(+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}\right)$$

$\frac{\partial x}{\partial a}=0$, θεωρείται σταθερό

$y=y(0,x)+an(x)$

$y'=y'(0,x)+an'(x)$

$$=n(x)\frac{\partial f}{\partial y}+n'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}$$

[redacted]

Συνολικά,

$$\frac{dJ}{da} = \int_{x_1}^{x_2} \left[n(x) \frac{\partial f}{\partial y} + n'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx \quad (*)$$

Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int_{x_1}^{x_2} n'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} dx = n(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} n(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \qquad \underline{n(x_1)=n(x_2)=0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} n(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Άρα με βάση αυτά που βρήκα η $(*)$ γίνεται:

$$\frac{dJ}{da} = \int_{x_1}^{x_2} \left[n(x) \frac{\partial f}{\partial y} + n'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} n(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx$$

Πως τελειώνει το υπόλ: από εδώ και πέρα το πράσινο ως τώρα

$$\frac{dJ}{da}\Big|_{a=0} = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} n(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx = 0 \quad \forall n(x) \text{ και } y(0,x) = y(x)$$

πέρα από τα x_1, x_2 του ορίσματος $\neq 0$

$n(x_1) = n(x_2) = 0$

$$\underset{\text{ΑπΠ}}{\Longrightarrow} n(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] = 0$$

$$\Rightarrow n(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] = 0$$

όμως $n(x) \neq 0$ εξ' ορισμού

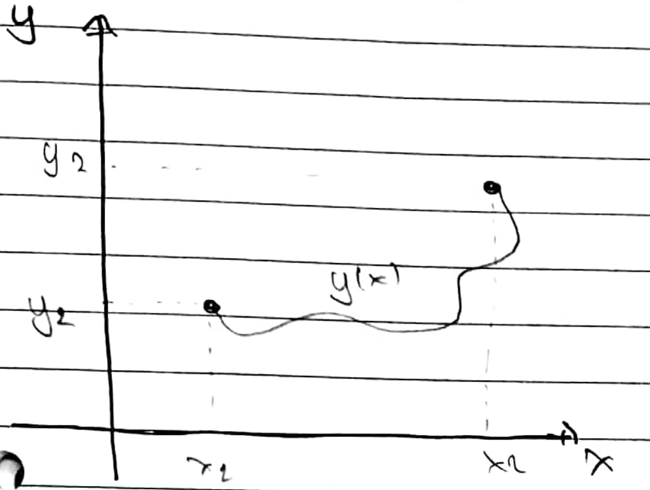
(αφού $n(x)=0$ μόνο αν $y(a,x)=y(0,x)$) ισχύει

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Scanned by CamScanner

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί η συντομότερη απόσταση δύο σημείων στο επίπεδο.



Μήκος καμπύλης c: Έστω $c(t)=(x(t),y(t))$

$L_a^b(c)=\int_a^b \|c'(t)\|dt=$

$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ ← εδώ πρέπει μεταβλητή το t

εδώ όμως είναι όλο και το κάνω ως προς x

μήκος καμπύλης από το x_1 στο x_2.

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{dy^2+dx^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=$$

$$dy=\frac{dy}{dx}dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx.$$

$$f=\sqrt{1+(y')^2}$$

Τα y, y' είναι για ένας ανεξάρτητες μεταβλητές εδώ

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad , \frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}}$$

πως θα μπορούσα να παραγωγίζω αφού έχω στο y' το x
μετά παραγωγίζω και όλα λύνεται γιατί βάζω x'

$$0-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=c$$

$$y'^2=c^2(1+y'^2)\Rightarrow (1-c^2)(y')=c^2 \Rightarrow (y')^2=\frac{c^2}{1-c^2}$$

$y'=$ σταθερή $=c_1$

Άρα $\boxed{y=c_1x+c_2}$

$$\left.\begin{array}{l} y(x_1)=y_1 \\ y(x_2)=y_2 \end{array}\right\} \underset{\text{βοηθ.}}{\Longrightarrow} c_1, c_2$$

Άρα έχω ευθεία

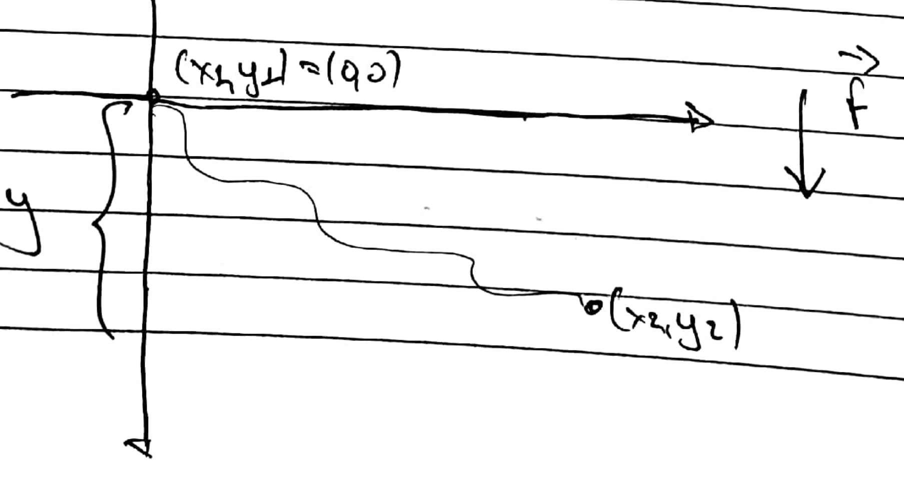
Για $c=\pm 1$ η εξίσωση είναι αδύνατη

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου)

Ένα υλικό σημείο κινείται κάτω από την επίδραση σταθερού πεδίου, ξεκινώντας από ηρεμία σε ένα σημείο (x_1,y_1). Μεταβαίνει σε ένα χαμηλότερο σημείο (x_2,y_2). Να βρεθεί η διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει για να ολοκληρώσει τη μετάβαση στον ελάχιστο χρόνο.

ΛΥΣΗ



• Ο χρόνος μετάβασης είναι $t = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{ds}{v}$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

Άρα,

ΠΡΟΣΟΧΗ εδώ όχι ανεξαρτ. μεταβλητή η x. Αλλά η y

$$t = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gy}} =$$

$$= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}}{\sqrt{2gy}}\, dy = \int \sqrt{\frac{(x')^2+1}{2gy}}\, dy$$

Τώρα η εξίσωση Euler είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x'} = c \text{ σταθερή} \Rightarrow \frac{(x')^2}{y(1+x'^2)} = c = \frac{1}{2a}$$

το δίνει παρακάτω στο γράφημα

• $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow x = \int \frac{y\, dy}{(2ay-y^2)^{1/2}}$$

1) στο παρον. συμπλ. τετράγωνο
2) και κάνω τριγωνομ. αντικατ. στο y υπόρριζα και κάνει τόσο

Η λύση του ολοκληρώματος είναι:

$$\begin{cases} y = a(1-\cos\theta) \\ x = a(\theta-\sin\theta) \end{cases}$$

κυκλοειδής καμπύλη

Scanned by CamScanner